

基準点測量の基礎の基礎

第1回

〈座標変換と公共座標〉

◆土地家屋調査士 新 隆博◆

◆ 連載開始に当たって

都市再生の街区基準点の成果が各市区町村に移管され、その写しが各法務局（登記所）に交付されることが、平成18年8月15日に通知されました。

不動産登記規則77条1項7号をはじめとし、地積測量図には公共座標の記録が必要となっていますが、この通知により、DID（人口密集地域）地区では、国土交通省が実施した街区基準点の成果と配点図が法務局に交付され、分筆等地積測量図の作成を伴う土地の登記には、必ず基準点測量に準ずる測量が必要になりました（新測地系での測量以外がなされている場合には、その登記申請は却下もあり得るということです）。

このように、土地家屋調査士を取り巻く環境は、現在、大きく変貌しています。

この点について、土地家屋調査士の先生方にお話を聞きますと、「任意座標系で測量した成果を、公共座標系（基準点の成果）に座標変換すればよい」というお答えを耳にすることが多いのですが、本当に「座標変換」で、こと足りるのでしょうか。甚だ疑問です。

このたび、縁がありまして、不動産法律セミナーに「基準点測量の基礎の基礎」を連載させていただくことになりました。そこで、連載を開始するに当たり、どのような構成で連載を行うか迷った挙げ句、「座標変換を行えば、基準点測量は本当にいらない」が正しいか否かについて、大切な誌面をお借りして、個人的な意見を述べさせていただくことにしました。

とりわけ、実際の測量実務で使われている「回転変換・並行移動変換・一般的な座標変換（回転＋並行移動変換）・ヘルマート（相似）変換・アフィン変換」等について公式の紹介をし、加えて、ヘルマート変換とアフィン変換に関しては「行列による実用式」を紹介しましたので、読者の皆さんも是非、計算例の検算を試みてください。

なお、今回の連載とともに、東京法経学院のホームページ上でも「関連記事」等を紹介しますので、併せてアクセス（URL <http://www.thg.co.jp/tyosa/seminar-tieup/>）してみてください。

CHAPTER I はじめに

I-1 座標変換は万全のツールではない

まず最初に、座標変換は万全のツールではありません。

その性質や計算内容が判らないまま、むやみに座標変換の計算を行いますと、算出された数値は自分の思っている場所と異なりますので、十分な注意が必要です。

！ 座標変換の仕組みから座標変換の問題点を例題（2例）として計算（ヘルマート）し、紹介してみました（後掲）。

そこでは、基準点測量に関して一切触れていませんが、基準点測量のルールの方が、座標変換の理論よりも簡単かもしれません。

I-2 観測データは最確値を用いる

測量における観測データは、いかに定誤差・過失を排除して、それでも残る不定誤差を、いかに処理するかにあります。つまり、観測データの最確値を用いることが必要なのです。

基準点測量でもデータの観測は、そのルール（原則）に従って行います。つまり、測量結果の成果（基準点の座標値）は、最確値（最確値＝観測値－残差）を用いることが必要なのです。

なお、最確値とは、座標成果内に誤差が内在している状態の値ですから、真値＝最確値ではありませんが、真値≠最確値です。

観測データが最確値であり、座標成果もまた最確値であれば、当然のことですが、同じ既知点において何回か測量すれば、測るたびに異なった成果が計算されます。また、同一の観測データを用いても既知点を異にすれば、節点位置誤差は異なる、すなわち、測量誤差は拡大します。

これを、「誤差伝播の法則」といいます。

そこで、既知点間を結びつけるような測量等をして、その誤差を一定の法則に基づいて配布するのですが、このような測量計算を「平均する」といいます。

I-3 開放トラバース計算に関連して

開放トラバースの計算は、出発点から次点（節点）へと、次々に誤差が伝播（拡大）されます。

それに対して、単路線方式（結合多角）の場合には、その誤差を配布することにより平均しますので、当然、開放トラバースの歪みと結合トラバースの歪みとは異なることになります。

では、夾角の観測誤差と平面上に測定された距離の測定誤差とが混在する開放多角の成果と単路線方式に基づいて平均された結合多角の成果は、果たして同じ基準上にあるのでしょうか、精度はどのようなのでしょうか。

土地家屋調査士として、自分の行った測量の精度が判らないのでは、話になりません。

さらには、このような状態下で任意座標系の多角点を用いて、基準点測量から得た基準点成果に座標変換を行った場合、その2つの計算結果にどのような影響が現れるのでしょうか。

基準点の測量結果が、細部点（境界点）にどのような影響を有するのかわかることなく、座標変換を行うということは、測量の誤差論的には無意味に近いでしょう。

任意座標には、任意座標系の基準があり、公共座標には、平面直角座標系という任意座標系とは種を異にする基準があるのです。このことは、座標変換においても基準点測量においても、測量を行ううえでは大変重要なことですので、よく覚えておいてください。

I-4 座標変換のツールとして役割

座標変換は、使う場所や目的に適合していれば、確かにすばらしいツールです。私自身、境界標の埋設後、現場のでき具合の点検に多点変換（ヘルマート変換、アフィン変換）を用いています。

ただし、私が多点変換を用いる場合には、これがなかなか難しいことなのですが、必ず既知点情報から平面直角座標上への伸縮率なるものを計算し、平面上で任意座標系を作成し、当該地の準拠点重心ができるだけ等距離になるように準拠点を指定し、計算するようにしています。

既に少し触れましたが、任意座標系同士の座標変換と任意座標系と平面直角座標系上の座標変換では、その方法が若干異なります。また、多点変換では、最小二乗法を用いパラメータを求めてから変換計算を行うため、計算結果の座標値（準拠点の座標成果）は、同一のものにはなりません。

ある専門書においても、「ヘルマート変換は、重心座標を重ね合わせた『フリー網平均計算』と同価である」という記載がありました。つまり、準拠点の座標は、自分の測量精度で揺らいでしまい、準拠点の成果と同一にならないこととなります。まさに、「フリー網」と同じ理論なのです。

I-5 任意座標系から平面直角座標系に直すためには

そこで、後述の本文にも記しましたが、任意座標系から平面直角座標系に直すために必要な方法を、基準点測量の基礎知識を取り入れながら、ここで若干説明してみたいと思います。

読者（調査士受験生）の多くは、初めて聞き見ることかもしれませんが、「平面直角座標系に直すためには、どのような補正をするのか」さえ知っていれば、理解可能かもしれません。

はじめに、右掲の任意座標系平面と平面直角座標系のイメージ図（図1）をご覧ください。

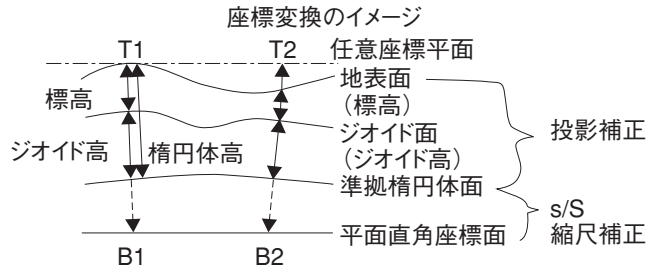


図1 座標面の投影の違い

これが、任意座標系と平面直角座標系の違いのすべてです。きわめて簡単です。そして、このイメージ図だけで終わりです。

「これで終わりです」では連載になりませんので、以下、多少の注釈を記述してみます。

CHAPTER II 任意座標と測量の基礎

II-1 はじめに

本来、任意座標系での投影面の規定は存在しません。強いて説明するならば、上掲図1のようなものではないでしょうか。

すなわち、T1の器械高の位置です。

だとしますと、

〈任意座標の定義〉

基点（任意の多角点）T1に、器械を据えたその器械の中心（T1の標高に器械高を加えた面）が、任意座標の投影面である。

となります。

任意座標系での投影面に関する規定がないため、私なりに上記のように定義しました。

II-2 観測値の誤差伝播

ここで、測量士補の学習の際に学んだ「真値＝観測値－誤差」、「最確値＝観測値－残差」という2つの定義を思い出してください。

誤差が判れば真値を確定できますが、実際には、この誤差も真値も知ることはできません。

そこで、最確値＝観測値－残差とし、計算を行っているのが測量計算です（この誤差には、定誤差・過失は含まれていません）。つまり、誤差の要因は、偶然誤差（不定誤差）のみです。

次に、「誤差の伝播法則」とは、観測された量から計算によって他の量を導き出す場合、これらの量の平均二乗誤差の間に成立する関係を述べたものです。つまり、観測値は、必ず誤差を含んでいるということです。

したがって、この観測値から導き出された結果には、必ず誤差が含まれているということです。この点は、任意座標系の測量でも、公共座標を用いた基準点測量以下の測量でも同様です。

II-3 任意座標の測量方法では、定誤差が残る可能性がある

測量を行う際、正反観測をしているでしょうか。

正反観測を行う理由は、視準線軸誤差の消去等、定誤差を消去するためであり、その操作を正反観測といいます。片観測では、定誤差が消去されません。

最小二乗法を用いる座標変換後の計算結果は、「最確値＝観測値－残差」の関係にあります。

従来、(既知の測量) 計算を行う場合に定誤差や過失が含まれてしまいますと、その定誤差は同一方向の偏り(バイヤス)として現れることが、また過失がある場合には数値が突発して悪くなることもあり、その扱いには十分な注意が必要です。

以下に「誤差の3公理」を記しますが、本来、この公理に従って起こる誤差は、不定誤差のみです。

〈公理〉

- 1) 小さい誤差の個数は、大きい誤差の個数より多い。
- 2) 等量で符号の相反する誤差の個数は、等しい。
- 3) 非常に大きい誤差は、めったに起こらない。

3)に属することの多い「過失がある場合」には、再検討(再測)することでその誤差(過失)を見える可能性が高いといわれています。

また、「偏りのある測量成果」は高精度ではありますが、低精度なものとなり、測量の相対評価は低いものとなっています。当然のことですが、その反対の低精度、高精度でも同様の評価です。

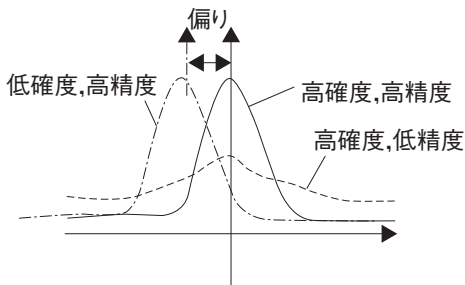


図2 (誤差曲線) 不定誤差の発生は正規分布に従う

II-4 任意座標系の特徴

任意座標系の測量は、その性質上、個別の集合を形成します。

少し詳しく説明しますと、

- ① 各々の基準方向角が異なる
- ② 各々の測量精度が異なる
- ③ 各々の基準面が異なる
- ④ 各々の測量における誤差が異なる

以上の4点です。

II-5 任意座標系管理の考え方

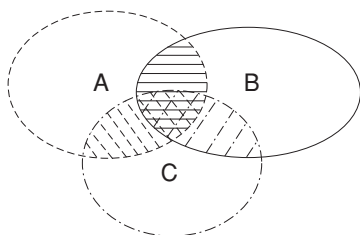


図3 任意座標を集合図で表した

A座標系とB座標系とのつながりはどうでしょうか。
 $A \cap B$
 B座標系とC座標系とのつながりはどうでしょうか。
 $B \cap C$
 A座標系とB座標系とC座標系とのつながりはどうでしょうか。
 $A \cap B \cap C$

さらに、ABCの各座標系のつながりはどうでしょうか。それらは、すべてにおいて統一性がありません。

管理面においても、基点の共通性がありませんので、難しいといえます。

そもそも任意座標系での座標値を管理するためには、現地に準拠点の数を数多く残さなければ、管理はできません。しかし、DID地区での管理は、いかに精度よく測量を行っても、10年後に再度測量を行う場合の準拠点の数は、おそらく10分の3程度しか残っていないでしょう。

そこで、やむを得ず新たに任意の座標系で測量すれば、今度は前回の誤差（歪み）と今回の精度とが異なってしまう、誤差のうえに誤差を生む結果となります（ここでいう「誤差」は、誤差論で論ずる誤差ではありません。そのため、「誤差（歪み）」と表記しました）。

また、何よりも同じ土地でありながら、異なる座標系で管理しなければならなくなり、初回の測量と再度の測量とのつながりがつかないことになってしまいます。

II-6 開放多角（トラバース）

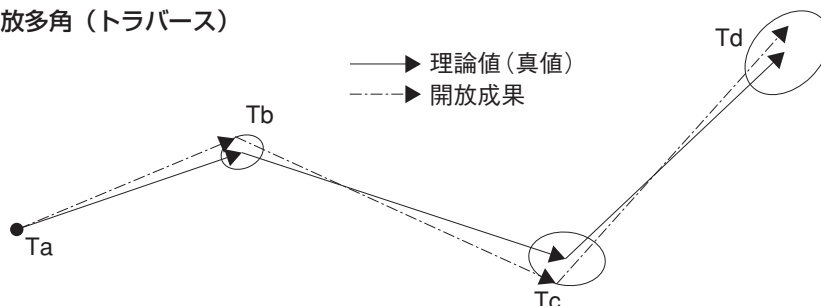


図4 開放の位置誤差

次に、誤差の伝播（拡張）について考えてみます。

多角測量の観測データには、不定誤差が内在するため、測線は理論値と異なった計算結果になります。

また、任意座標系での測量の多くには定誤差が含まれていることから、誤差楕円は、不定誤差のみの場合よりも大きくなっていることが予想されるため、十分な注意が必要です。

II-7 定誤差（系統的誤差）とは何か

「定誤差」とは、理論上その誤差が起きる原因がわかっているため、器械の操作、計算等で「消去できる誤差」のことをいいます。

主たる定誤差をまとめてみますと、

〈器械誤差〉

誤差名	誤差が起きる原因	誤差の消去法
目盛盤の偏心誤差	トランシットの鉛直軸の中心と目盛盤の中心が一致していないために起きる誤差	対回観測の平均をとる
視準軸誤差	視準軸と水平軸が直交していないため、すなわち十字線の調整が不完全なために起きる誤差	正反観測を行うことで消去される
水平軸誤差	水平軸が鉛直軸と直交していないため、すなわち水平軸の調整が不完全なために起きる誤差	
視準軸の偏心誤差	望遠鏡の視準線が回転軸の中心と一致していない（鉛直軸と交わっていない）ために起きる誤差	

その他、〈物理的誤差（観測中の温度変化等によって生じる誤差）〉

〈個人的誤差（観測者個人の癖によって生じる誤差）〉

などがあります。

II-8 放射トラバース

次に、細部測量（境界測量）のような、放射多角の場合について考えてみましょう。

ここでは、位置誤差について考えてみることにします。

測定誤差	5 mm	de	Ds
角度の精度	20 秒	0.005	0.007
測定距離	50 m	0.005	0.007

とします。

真円を考えますと、

49.995	50.000	50.005
0.004848	0.004848	0.004848

（角度の精度は3級経緯儀の精度）

となります。

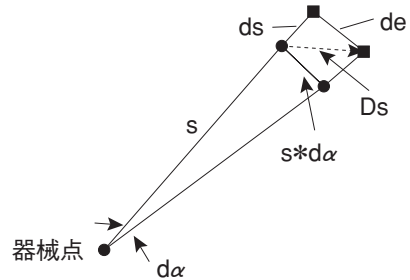


図5 放射の位置誤差

II-9 求心誤差の影響

ここでは、求心誤差の影響を考えます。

c : 求心誤差	1 mm
s : 零方向基準点までの距離	50 m
SO : 測定距離	5 m
dαc : 角度の観測誤差	20 秒

（3級経緯儀の精度）

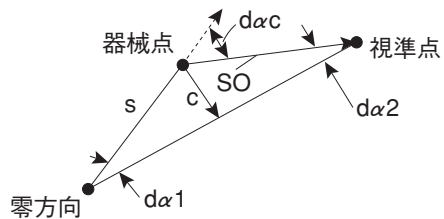


図6 求心誤差

以上より、器械点において求心誤差1mmある場合の誤差は、

零方向（s）を基準とした視準点のズレ 0.0012021 m

視準点（SO）を基準とした零方向のズレ 0.012 m

となります。

計算上、後視点（零方向）の距離より視準点の距離を長く取りますと、誤差の影響を受けやすいので、特に公共座標系の測量では注意を払うことが必要です。

CHAPTER III 公共座標系と任意座標系の相違

公共座標で測量を行う場合でも、任意座標で測量を行う場合でも同じことですが、「測量の原則」とは、定誤差を排除して、それでも残るなんだか判らない誤差（偶然誤差、不定誤差）を処理することにより、「最確値を求めること」を前提として行っている以上、計算に使われる観測データには、不定誤差以外含まれていないことが第一条件となります。

基準点測量から補助多角の測量を行い、細部測量（境界点の測量）を行った場合の観測データに含まれる誤差と任意座標で行うトラバース測量から細部測量を行った場合の観測データに含まれる誤差は、放射トラバースによってなされるため、双方の細部測量の誤差はほぼ同量と考えられます（同一ルール、同一条件で観測した場合です）。

ということは、境界点の位置精度を左右する測量は、基準点測量（多角測量）の精度であると考えられます。

Ⅲ-1 公共座標の成り立ち

片方の座標系が公共座標の場合には、任意の座標系と異なり、平面直角座標系での成果を用いているため、任意座標系と異なる分の補正を必要とします（「図1 座標面の投影の違い」を参考）。

補正は、基準点測量と同様です。

任意座標系の投影面は「**地表面+器械高**」ですが、公共座標の場合は、まず地表面上の観測データを楕円体高（**標高+ジオイド高**）を用いて高さの補正（投影補正）を行い、それに縮尺係数を乗じることによって平面直角座標上の距離に直し、座標の計算を行うこととなります。

！ 測量は地表面で行われ、すべての測量成果は、準拠楕円体面上に水平投影されます。つまり、標高による歪みを準拠楕円体面上に補正することにより、一律の成果にしているのです。

しかし、球面体上への投影であるため、ここで一工夫を加えたものが、ローカル座標系（公共測量の座標系）です。これは、日本全国を19に分割して、各々独立した座標系になっています（ローカル座標原点は、19箇所あります）。詳しくは、専門書を参考にしてください。

なお、平面（平面直角座標）の成果は、 s/S の係数を乗じることにより得られます。

ここで、前掲図1をご覧ください。T1-T2の2点間（現地水平距離）とB1-B2の2点間（平面直角座標上の距離）を下記の表のように書き換えてみますと、

S'	T1-T2の距離：現地水平距離		
h 標高	} 楕円体高	H	投影補正
Hg ジオイド高			
S	球面上の距離		
s/S 縮尺係数			縮尺補正
s	B1-B2の距離：平面直角座標上の距離		

となります。

Ⅲ-1-1 投影補正

投影補正の公式は、以下のようになります。

公 式	$S' * (R / (R + H))$
-----	----------------------

S'：現地の水平距離 H：測点の楕円体高 R：6370km

*公式より $R / (R + H)$ ：投影補正率

図1からも判るように、B1、B2の座標値を得るためには、H（楕円体高）が必要になります。この点は、任意座標系と公共座標系の大きな違いです。要するに、2次元の一筆地測量を目的とした任意座標では、この「高さ」という概念がありません。

しかし、公共測量に規定された成果（新測地系の公共座標値）を得るためには、高さの成果を踏まえた測量、つまり、三次元の測量を行わなければならないこととなります。

Ⅲ-1-1の公式内にあるH（楕円体高）を求めなければ、新測地成果の座標を得ることはできないのです。また、距離が短いときの例外規定でも、Hは標高を用いるという規定になっていますので、標高を求めなければ、最終の成果は求まらないことになるのです。

さて、「**投影補正**」とは、地表面上の観測値を準拠楕円体上のデータに補正することです。つまり、高さの違いによる測定値を準拠楕円体上で一律にすることです。

では、この高さが水平位置に、一体どの程度影響するのでしょうか。参考までに、楕円体高（ジオイド高+標高）の表（次頁）を作ってみましたので、ご覧ください。

〈表の見方〉

ジオイド高 36.00m

標高100mでジオイド高36m（楕円体高136m）の場合、23.419mで1mm、距離の補正が必要です（標高2000mでは、約16mで1mmの補正が必要となりますので、細部測量でも距離の補正が必要です）。

後ほど両差の計算は説明しますが、両差の計算を行えば、現地水平距離（約86m）で1mmの高さ補正が異なります。

右の表1からも判りますように、この1mmが大切であることはいうまでもありません。

標高が高ければ、境界測量でも影響を及ぼすこととなります。右の表1では末位を切り捨て計算していますが、両差の計算で算出された標高に対する補正量1mmを加えるか否かで影響が出て、距離も変わってきます。

表1 投影補正のまで表（単位：m）

標高	影響が出る距離	
	1mm	0.5mm
0	176.944	88.472
10	138.478	69.239
20	113.750	56.875
30	96.515	48.257
40	83.815	41.907
50	74.069	37.034
60	66.354	33.177
70	60.094	30.047
80	54.913	27.456
90	50.555	25.277
100	46.838	23.419
100.001	46.837	23.418

Ⅲ-1-2 s/Sの係数

s/Sの係数の公式は、以下ようになります。

公 式	$m_0 \{ 1 + (1 / (6 * R^2 * m_0^2)) * Y1^2 + Y1 * Y2 + Y2^2 \}$
-----	---

m₀ : 0.999900 R : 6370km

Ⅲ-2 任意座標系上の距離を平面直角座標系上の距離に変換する方法

伸縮率（投影補正+縮尺係数）= m * (R / (R + H)) m : 当該地の縮尺係数
 投影補正、縮尺係数の計算公式は、前記Ⅲ-1-1, Ⅲ-1-2を参照してください。

表2 投影補正・縮尺係数と縮尺率

	X	Y	S'	s/S	0.999900
T 1	100.256	110.324			
T 2	145.336	190.259	91.7704	縮尺率	0.999886
標高 h	55.00m	ジオイド高	36.00m		

比例係数（伸縮率=0.999886）とは、実は縮尺係数と投影補正率を乗じたものです。

上記の公式より、

通常の補正を行って

得た結果と補正量

現地距離	91.7704
投影補正量	0.0013
球面距離	91.7691
縮尺補正量	0.0092
平面距離	91.7599

補正量だけ加えますと

現地距離	91.7704
補正量	-0.0105
平面距離	91.7599

任意座標の距離

平面直角座標上の距離

縮尺率を乗じて

みますと

91.7704	91.7704
	×
伸縮率	0.999886
	=
91.7599	91.7599

水平角の場合にも、球面角を平面角に直す方法がありますが、1辺の長さが約10km位以上でなければ角度に影響が出ませんので、ここでは省略いたします。

なお、任意座標系を平面直角座標系上の値に変換する方法は、Ⅶを参照してください。

Ⅲ-3 両差（気差と球差）

平面距離を求めるためには、概算ではありますが、楕円体高あるいは標高が必要となります。標高が必要ということは、高度角の観測値が必要ということであり、3次元の測量を行うということになります。

そこで、球面上の観測値に影響を及ぼす気差、球差（両差）の計算についての理解が必要となります。

Ⅲ-3-1 気差・球差（両差）について

Ⅲ-3-1-① 気差とは

光が屈折率の異なる境界面を通過する場合には、その境界面で屈折します。

また、地球上では、一般に地面から上空に向かうに従い空気の密度は減少します。

したがって、光が鉛直面に進む場合には、一般に上方に凸の曲面に従い進むこととなります。

高度角により高さを求める場合、この光の屈折による高さの影響量を「気差」といいます。

2点間の水平距離をS、地球の曲率半径をR、屈折係数をkとする気差の公式は、

公 式	$(k * S^2)/(2R)$	
		k : 0.133

となります。

Ⅲ-3-1-② 球差とは

三角水準測量を実施して高さを求める場合に、2点間の距離が長くなると、地球の曲率を考慮する必要が生じます。

いま、A点から球面距離Sの点の高度角 α を測定した場合、2点間の計算比高（ $S * \tan \alpha$ ）に曲率による項

公 式	$(S^2)/(2R)$	
-----	--------------	--

を加える（加えなければならない）こととなります。この項が、球差です。

Ⅲ-3-1-③ 両差とは

気差と球差を加えたもので、間接水準測量の場合に用います。

公 式	$(1-k) * ((S^2)/(2R))$	
-----	------------------------	--

k = 屈折係数 = 0.133 S : 2点間の球面距離（短距離の場合は、平面距離）

R : 地球の曲率半径 （解説は山海堂「測量用語辞典」より）

実際の基準点測量の観測では、高度角を進行方向とその反対側からも観測しているため、両差は互いに打ち消し、その補正は行いませんが、高度角を進行方向のみ観測した場合には、この計算が必要になりますので注意してください。

両差の計算	(m)	(m)	(m)
	S	R	補正量
	86.000	6370000	0.001

以上において、平面直角座標系と任意座標系との違いを述べてきましたので、大体の概念はご理解いただけたことと思います。

上記の概念が理解できれば、おそらく座標変換（任意座標系から公共座標系への変換）を理解するには十分だと思います。

CHAPTER IV 座標変換

IV-1 座標変換（最小二乗法を用いるもの）の結果は「最確値」である

これまででは、誤差論の基礎的なお話しをしてきましたが、面白いことに、座標変換では「最確値＝観測値－残差」という定義が当てはまります。つまり、観測値には誤差が含まれており、その観測値から最小二乗法を用いて処理をすれば、最確値が求まるという仕組みがあるのです。

！ 座標変換（最小二乗法を用いるもの）は、相手方の座標（変換相手の測量結果（最確値））と自分の測量成果（これまた最確値）同士を当てはめ、最小二乗法から係数を求め、その座標変換の計算から得られた結果もまた、「最確値」です。

IV-2 座標変換をよく使うと思いますが、座標を変換するとはどのようなことでしょうか

同じ場所において、Aという座標系で測量した成果を、Bという座標系で測量した成果に変換することを「座標変換」というのですが、

- ① AとBは、同一の測量精度ではない
- ② AとBは、異なる測量機器を使用している
- ③ AとBの観測者は異なる

場合の座標変換では、「Aの観測値の最確値とBの観測値の最確値とは同一ではない」ということになります。

当然のことですが、任意座標系から任意座標系、任意座標系から公共座標系、旧測地系から新測地系への座標変換は、一定のルールに従えば可能になりますが、十分な注意を払いませんと大変なことが生じます。

とりわけ、任意座標系を公共座標系に変換する場合には注意をしてください。

- ！ 1) 多点変換といわれるヘルマート変換（相似変換）やアフィン変換は、重心座標系での変換になるため、重心から離れれば離れるほど、トレンド（傾向）変換の位置誤差は大きくなります。
- 2) 重心座標系の変換ということは、数の論理、すなわち正しい1点の境界点より、一定の法則により異なった多数の準拠点が正しい位置となります。
- 3) 1)より、任意座標系から公共座標系に変換する場合は、伸縮率を掛けません。
- 4) 任意座標系よりも、公共座標系（平面直角座標系）の方が、面積が小さくなります（座標法の場合）。

ここで、2)について計算してみたいと思います。

例えば、正しい境界点が1点と、建物建設工事等により復元された境界点が3点あったとします。

この1点の境界は原始境界（筆が生まれた時点から存する境界点）であり、この筆を確定する時も測量がされ、座標値が存在するとします。また、工事の際に移動した境界標3点は、何らかの理由により、同一方向に平行移動していたとします。

さて、この問題が上記2)のように、理論的になるのかを検証（ここでは、簡単に説明するため、任意座標系同士の例として検証）してみます。

なお、ヘルマート変換を使用しましたので、その変換計算式をご紹介します。

〈ヘルマート変換による検証とその計算式〉

N個の準拠点の既知点座標及び新座標（現地座標成果）を、

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$$

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_n, Y_n)$$

としますと、座標の変換式は、

$$\begin{cases} X = a x + b y + c \\ Y = -b x + a y + d \end{cases}$$

準拠点が2つしかない場合は、4元1次連立方程式を解けば足ります。準拠点が3つ以上の場合には、最小二乗法を用いることになります。

$$a = \frac{[x][X] + [y][Y] - n[xX + yY]}{[x]^2 + [y]^2 - n[x^2 + y^2]}$$

$$b = \frac{[y][X] + [x][Y] - n[yX + xY]}{[x]^2 + [y]^2 - n[x^2 + y^2]}$$

$$c = \frac{\{[X] - a[x] - b[y]\}}{n}$$

$$d = \frac{\{[Y] + b[x] - a[y]\}}{n}$$

ただし、[] はガウスの記号で、括弧内の数値は総和を表します。

[X] = X₁ + X₂ + X₃ …… + X_n (nは準拠点の数)

例題

既知点成果				現地成果	
1	100.000	100.000	正しい境界点	200.000	200.000
2	100.000	110.000	平行移動した境界点	200.500	210.500
3	110.000	110.000	平行移動した境界点	210.500	210.500
4	110.000	100.000	平行移動した境界点	210.500	200.500

結果

	既知点座標		係数				変換座標	
	x	y	a	b	c	d	X	Y
1	100.000	100.000	1.025	0.000	97.750	97.750	200.250	200.250
2	100.000	110.000	1.025	0.000	97.750	97.750	200.250	210.500
3	110.000	110.000	1.025	0.000	97.750	97.750	210.500	210.500
4	110.000	100.000	1.025	0.000	97.750	97.750	210.500	200.250

既知点1には、(100, 100)の座標があるため、標準偏差は0.25です（単位：m）。

残	差
0.250	0.250
-0.250	0.000
0.000	0.000
0.000	-0.250

正しい境界点のはず！

CHAPTER V 座標変換の種類

V-1 回転変換 (変換パラメータは1つ: 回転角 θ)

公 式	$X = x \cos \theta + y \sin \theta$
	$Y = -x \sin \theta + y \cos \theta$

座標系の原点の回りに、任意角 θ だけ回転した新座標系に変換する方法です。

x, y の座標計算は、

$$x = s \cos a, \quad y = s \sin a$$

であり、新しい座標系の X, Y の座標計算は、

$$X = s \cos (a - \theta)$$

となります。

そして、加法の定理より、

$$X = s \cos a \cdot \cos \theta + s \sin a \cdot \sin \theta$$

となります。

これに、前記の公式を代入しますと、

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta$$

となります。

同様に、

$$Y = s \sin (a - \theta) = s \sin a \cdot \cos \theta - s \cos a \cdot \sin \theta$$

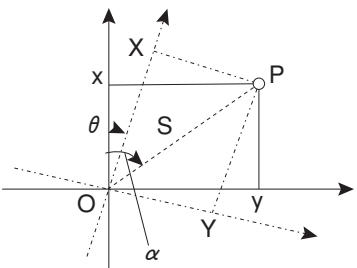
となります。

これを整理しますと、

$$Y = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

となります。

したがって、旧座標値 (x, y) を $(0, 0), (50, 50), (100, 100)$ 、回転角 θ を 30° とし、新座標系 (X, Y) は $(0.000, 0.000), (68.301, 18.301), (136.603, 36.603)$ となります。



V-2 並行移動変換 (変換パラメータは2つ: x の並行量, y の並行量)

公 式	$X = x \pm a$
	$Y = y \pm b$

右図において、 X を求めるためには、

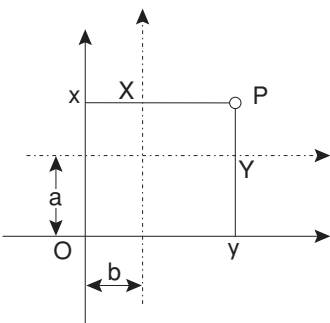
$$X = x - a$$

$$Y = y - b$$

となります。

いま、 $a = 10, b = 10$ (座標原点が、第3象限に来る場合には、 $-$ (マイナス) 数値で入力) としますと、

旧座標値 (x, y) が $(0, 0), (50, 50), (100, 100)$ の場合、新座標系 (X, Y) は $(-10, -10), (40, 40), (90, 90)$ となります。



V-3 一般座標変換（回転+並行移動変換，並行移動+回転変換 変換パラメータは3つ：回転角 θ ，xの並行量，yの並行量）

公 式	$X = x \cos \theta + y \sin \theta \pm a$
	$Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \pm b$

一般座標変換とは，V-1，V-2の2つの変換を同時に行う座標変換をいいます。

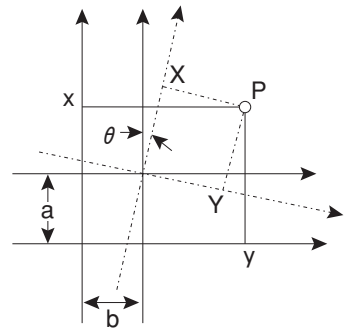
また，一般座標変換では，新座標原点の位置により a，bの符号が変わりますので，十分な注意が必要です。

回転角 θ についても，別途の計算が必要となります。

なお，上掲の座標変換公式が，1倍固定の座標変換式です。

いま，回転角 θ を 30° ， $a = 10$ ， $b = 10$ としますと，

旧座標値 (x, y) が (0, 0), (50, 50), (100, 100) の場合，新座標系 (X, Y) は，(-10, -10), (58.30127, 8.301), (-416.3975, 26.603) となります。



V-4 ヘルムート変換（相似変換 変換パラメータは4つ：回転角 θ ，xの並行量，yの並行量，伸縮率k）

V-3の一般座標変換とヘルムート変換との違いは，伸縮率(k)の項があるか否かの違いです。

公 式	$X = k(x \cos \theta + y \sin \theta) \pm a$
	$Y = k(-x \sin \theta + y \cos \theta) \pm b$

その計算式は，VI-2を参照してください。

ここでは，伸縮率の検算を紹介します。伸縮率の検算

伸縮率の検算	度	分	秒	
$\sqrt{a^2 + b^2} = 1.0250000$	0	0	0.00	相似変換の回転角
回転角 θ の点検	0	0	0.00	1倍固定の回転角
$ATAN \theta = 0$	0	0	0.00	点検OK

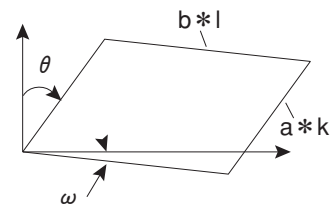
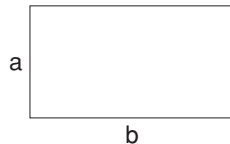
座標変換後の準拠点の重心は，観測値（同準拠点）の重心と等しくなります。このことから，重心座標系（原点）であることが判ります。

V-5 アフィン変換（変換パラメータは6つ）

この座標変換はx軸に回転角と伸縮率を持ち，同様に，y軸にも回転角と伸縮率を持ちます。

また，並行移動量（Xの移動量，Yの移動量）があるため，既存の測量精度の悪いものを変換するためには最適です。

イメージとしては，正方形が平行四辺形に変換され，あるいは真円が楕円に変換されると思ってください。



変換後の座標成果は，当然，平面

直角座標上の座標成果ですし，2本の平行な直線をアフィン変換しても，当然，平行を保ちます。

公 式	$X = k(x \cos \theta) + l(y \sin \omega) \pm a$
-----	---

〈アフィン変換の計算式〉をご紹介しますと、

N個の準拠点の既知点座標及び新座標（現地座標成果）を

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$$

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_n, Y_n)$$

としますと、座標の変換式は、

$$\begin{cases} X = a x + b y + e \\ Y = -c x + d y + f \end{cases}$$

$$a = \{(X x)(y y) - (X y)(x y)\} / k$$

$$b = \{(X y)(x x) - (X x)(x y)\} / k$$

$$c = \{(Y y)(x y) - (Y x)(y y)\} / k$$

$$d = \{(Y y)(x x) - (Y x)(x y)\} / k$$

$$e = ([X] - a[x] - b[y]) / n$$

$$f = ([Y] + c[x] - d[y]) / n$$

ただし、[] はガウスの記号で、括弧内の数値は総和を表します。

$$[X] = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n \quad (n \text{ は準拠点の数})$$

$$k = (x x)(y y) - (x y)^2$$

$$(X x) = n[X x] - [X][x] \quad (Y x) = n[Y x] - [Y][x]$$

$$(X y) = n[X y] - [X][y] \quad (Y y) = n[Y y] - [Y][y]$$

$$(x x) = n[x x] - [x]^2 \quad (x y) = [x y] - [x][y]$$

$$(y y) = n[y y] - [y]^2$$

既知点成果

1	100.000	100.000
2	100.000	110.000
3	110.000	110.000
4	110.000	100.000

現地成果

200.000	200.000
200.010	210.005
209.998	210.003
210.001	200.000

結果

	既知点座標		係 数					
	x	y	a	b	c	d	e	f
1	100.000	100.000	0.99945	1.00040	-0.00010	-0.00035	100.023	99.970
2	100.000	110.000	0.99945	1.00040	-0.00010	-0.00035	100.023	99.970
3	110.000	110.000	0.99945	1.00040	-0.00010	-0.00035	100.023	99.970
4	110.000	100.000	0.99945	1.00040	-0.00010	-0.00035	100.023	99.970

変換座標	
X	Y
200.003	200.000
200.007	210.004
210.001	210.003
209.998	199.999

観測値の重心	
205.002	205.002

変換後の重心	
205.002	205.002

以上が、一般的な座標変換です。

丸めの問題で、皆さんがお持ちの測量計算ソフトと解答が異なるかもしれません。もし、間違っていましたら申し訳ありません。

CHAPTER VI 任意座標系から公共座標系への実例

ヘルマート変換とアフィン変換は、ともに重心座標系の座標変換ですので、ここでは重心から離れた座標値を変換（トレンド変換）してみたいと思います。

以下の例は、私が実際に分筆登記で取り扱った東京都某区の成果です。

この折り、私は分筆時の成果（公共座標）を、

- ① 某区の「基準点使用承認」を得て、単路線でしたが基準点測量を行い、次に、
- ② 通常の調整計算をして、地積測量図を作成し、そして、
- ③ 境界点の埋設後、通常の任意座標系で境界点の点検を行うという手順で得ました。

計算例は、ヘルマート変換で行っています。

地積測量図の成果			(球面上の成果) 現地点検のための任意座標		平面上に変換した 平面上の任意座標		
1	-37548.103	-21027.030	1	316.612	301.578	316.578	301.545
2	-37541.115	-21016.568	2	318.163	314.061	318.129	314.027
3	-37546.728	-21013.058	3	311.570	314.682	311.536	314.648
4	-37552.068	-21009.718	4	305.300	315.270	305.267	315.236
5	-37558.686	-21017.870	5	303.044	305.016	303.011	304.983

次に、平面直角座標系に変換するために必要な事項です。

平均縮尺係数：0.999905 平均標高：47.066 平均ジオイド高：37.188

楕円体高（平均標高+平均ジオイド高）：84.254

伸縮率1（投影補正率）：0.9999868 伸縮率2（投影補正率*縮尺係数）：0.99998918

伸縮率2の係数は、任意座標値を平面直角座標系上の任意座標系に変換するために必要になります。

なお、イメージとして図1を参照してください。

また、座標変換の計算については、行列を用いた方法で行っています。

計画行列 (A)				観測ベクトル (L)
316.578	301.545	1	0	-37548.103
318.129	314.027	1	0	-37541.115
311.536	314.648	1	0	-37546.728
305.267	315.236	1	0	-37552.068
303.011	304.983	1	0	-37558.686
301.545	-316.578	0	1	-21027.030
314.027	-318.129	0	1	-21016.568
314.648	-311.536	0	1	-21013.058
315.236	-305.267	0	1	-21009.718
304.983	-303.011	0	1	-21017.870

計画行列 (A) の転置行列 (A')									
316.578	318.129	311.536	305.267	303.011	301.545	314.027	314.648	315.236	304.983
301.545	314.027	314.648	315.236	304.983	-316.578	-318.129	-311.536	-305.267	-303.011
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

(A'A)			
964419.987	0	1554.52074	1550.43919
0	964419.9869	1550.43919	-1554.5207
1554.52074	1550.439185	5	0
1550.43919	-1554.52074	0	5

(A'A) ⁻¹			
0.00293509	0	-0.9125312	-0.9101352
0	0.003	-0.910	0.91253116
-0.9125312	-0.910	566.132	0
-0.9101352	0.913	0.000	566.131581

(A'L)
-90956269.3
-25546687.8
-187746.7
-105084.244

k	
a	0.89380448
b	0.44873425
c	-37966.375
d	-21154.493

回転角 = 26.6589244556 A T A N (b / a)
伸縮率 = 1.0001244309 $\sqrt{a^2 + b^2}$

< 1倍固定の計算 >

回転角 = 26.6589244556 回転角のcos = 0.89369327708 回転角のsin = 0.44867842214
c = -37966.323 d = -21154.476 伸縮率 = 1.0000000000

1倍固定変換

x	y	a	b	c	d
316.578	301.545	0.89369328	0.44867842	-37966.323	-21154.476
318.129	314.027	0.89369328	0.44867842	-37966.323	-21154.476
311.536	314.648	0.89369328	0.44867842	-37966.323	-21154.476
305.267	315.236	0.89369328	0.44867842	-37966.323	-21154.476
303.011	304.983	0.89369328	0.44867842	-37966.323	-21154.476

変換後の座標

X	Y
-37548.102	-21027.029
-37541.116	-21016.570
-37546.729	-21013.057
-37552.068	-21009.719
-37558.684	-21017.870

相似変換

x	y	a	b	c	d
316.578	301.545	0.89380448	0.44873425	-37966.375	-21154.493
318.129	314.027	0.89380448	0.44873425	-37966.375	-21154.493
311.536	314.648	0.89380448	0.44873425	-37966.375	-21154.493
305.267	315.236	0.89380448	0.44873425	-37966.375	-21154.493
303.011	304.983	0.89380448	0.44873425	-37966.375	-21154.493

変換後の座標

X	Y
-37548.102	-21027.030
-37541.115	-21016.570
-37546.729	-21013.057
-37552.068	-21009.718
-37558.685	-21017.870

変換係数を求めるための準拠点は、上記のとおり、変換後の座標値を比べても大差はありません。

ここで、変換後の座標値と地積測量図の成果を見比べてください。

数mm異なります。これが、「揺らぎ」です。

また、上記の計算から得られた変換係数を用いた変換が、トレンド（傾向）変換なのです。

トレンド変換では、重心では一致しますが、重心から離れれば離れるほど較差が大きくなっていきます。

具体的には、下表のようになります。

〈トレンド（傾向）による座標変換〉

地表面上		平面上		1倍固定		相似変換	
0.000	0.000	0.0000	0.0000	-37966.323	-21154.476	-37966.375	-21154.493
50.000	50.000	49.9946	49.9946	-37899.211	-21132.228	-37899.255	-21132.242
100.000	100.000	99.9892	99.9892	-37832.100	-21109.980	-37832.135	-21109.991
150.000	150.000	149.9838	149.9838	-37764.989	-21087.731	-37765.016	-21087.740
200.000	200.000	199.9784	199.9784	-37697.877	-21065.483	-37697.896	-21065.489
250.000	250.000	249.9729	249.9729	-37630.766	-21043.235	-37630.776	-21043.238
300.000	300.000	299.9675	299.9675	-37563.655	-21020.986	-37563.657	-21020.987
350.000	350.000	349.9621	349.9621	-37496.543	-20998.738	-37496.537	-20998.736
400.000	400.000	399.9567	399.9567	-37429.432	-20976.490	-37429.417	-20976.485
450.000	450.000	449.9513	449.9513	-37362.321	-20954.241	-37362.298	-20954.233
500.000	500.000	499.9459	499.9459	-37295.209	-20931.993	-37295.178	-20931.982
550.000	550.000	549.9405	549.9405	-37228.098	-20909.745	-37228.058	-20909.731
600.000	600.000	599.9351	599.9351	-37160.987	-20887.496	-37160.938	-20887.480
650.000	650.000	649.9297	649.9297	-37093.875	-20865.248	-37093.819	-20865.229
310.904	310.088	310.8705	310.0543	-37549.385	-21016.864	-37549.385	-21016.864

↑ (重心座標)

較差（1倍－相似）	
0.052	0.017
0.044	0.014
0.035	0.012
0.027	0.009
0.018	0.006
0.010	0.003
0.002	0.001
-0.007	-0.002
-0.015	-0.005
-0.023	-0.008
-0.032	-0.011
-0.040	-0.013
-0.048	-0.016
-0.057	-0.019
0.000	0.000

任意座標で観測したものを公共座標に変換しようとした場合には、いったんすべての任意の座標値を平面直角座標系上のデータ（座標成果）に直さなければなりません。また、相似変換の注意点は、重心から離れると変換誤差が大きくなってしまいます。

そこで、平面座標系と同じ基準に変換し、1倍固定変換を用いることにより、できるだけ誤差を小さくすることが必要です。

さらに、一筆地測量を行う場所と基準点の配点も考慮しなければ、座標変換は難しいものとなります。

このように、正直、座標変換は便利ではありますが、測量（誤差論）の判らない人には扱わずらいものといえるでしょう。

測量の原則とは、観測値の最確値を用いて平均計算（誤差配布）を行い、極力、誤差を排除することにより最確値を求めますが、最終の成果（座標値）のなかにも誤差が内在しています。つまり、最終成果もまた最確値なのです。

既に記述しましたが、最小二乗法を用いて行う座標変換は、「最確値＝観測値－残差」という定義に当てはまります。つまり、既知の成果も現地の成果も、異なる観測誤差（この誤差は、不定誤差でなければなりません）が内在しているため、その双方が同一になることはありません。したがって、不定誤差の起きる要因が判らないために、同じ条件下で測量しても同じ成果にならないのです。

「微量の補正量ですが、任意座標の計算を行う場合、両差の計算をしていましたか。視準線は、同一でしたか」と問われた場合、その意味を知っていないと土地家屋調査士としては恥ずかしいこととなります。つまり、任意座標でも高さの概念から約86mを超える場合、1mmの補正量が出てくるということです。また、視準線が同一でない場合には、この視準線が同一となるように、個別に計算をする必要があるのです。なぜなら、この誤差は定誤差であり、観測データに加わってはいけな誤差であるからです。

このようなことから考えますと、一筆地測量を目的とする多角測量の大多数が2次元の測量のため、両差の補正を行っていないと思われます。定誤差が片方の測量成果に内在していたとしましたら、定誤差は同じ方向に現れるため、偏り（バイアス）として現れると考えられます（図2参照）。

CHAPTER VII 任意座標を平面直角座標上の任意座標に変換する方法

Ⅲ-2で、任意の座標値のある2点間の距離を平面直角座標上の距離に直す方法を紹介しましたが、ここでは、Ⅲ-2を応用して、任意の座標値を平面直角座標上の値に変換する方法を紹介します。

現地基準点の成果から、

平均標高：200.00m 平均ジオイド：35.00m 平均縮尺係数：0.999905 $k = 0.999868$
としますと、

	地表面上の任意座標		伸縮率	平面直角座標上の任意座標					
	X	Y		k	x	y	s'		
1	112.235	150.145	S'	0.999868	112.220	150.125	s'		
2	136.445	161.233		26.628	0.999868	136.427		161.212	26.624
3	135.336	154.224		7.096	0.999868	135.318		154.204	7.095

以上のような座標が得られます。

これを、2点間の距離で点検しますと、

地表面上の座標より	26.628	7.096	縮尺係数の公式から	-0.003	-0.001
投影補正の公式から	-0.001	0.000	平面直角座標上の距離	26.624	7.095
準拠楕円体上の距離	26.627	7.096			

となります。

この方法は、あくまでも重心座標系の考え方です。

任意座標を公共座標に変換する場合、高さを用いることで伸縮率を求めることが、いままでの座標変換と異なり面白い点なのです。

先ほどの基準点測量の場合と同様、(標高+ジオイド高) = 楕円体高という間接水準の部分が、任意座標を公共座標に直すために重要な部分のk(伸縮率)を決定しています。この部分の計算が、任意座標系を平面直角座標系上の任意座標(同じ基準)へと変換する部分です。

座標変換については、所論があると思いますが、測量の誤差論を理解しないと誤った計算結果を生み出してしまうおそれがあることに、十分な留意が必要です。

CHAPTER VIII 終わりに当たって

座標変換を行うための係数（多点変換において）は統計的手法を用いているため、準拠点が異なれば当然、その係数も異なります。また、重心座標系の変換であるため、伸縮率を設ければ重心から離れれば離れるほど、変換誤差が生じることにもつながります。

これらを考慮して十分に点検をしたとしても、先述のとおり統計的手法ですから、傾向による座標変換により算出された結果の位置は、点検として変換される座標系での測量を行いませんと確認できません。

それでは、基準点測量を行わないで、任意座標を公共座標に変換する意味はないこととなります。

結論をいいますと、座標変換から得られた成果を使用するよりも、基準点測量のルールを学び、基準点測量を行う方が、その成果については安心であるということです。もっとも、データ（座標値）のあるものについては、点検のために行う場合には素晴らしいツールであることに間違いありません。

さて、座標変換の入口のお話をいたしましたので、ご理解いただけましたでしょうか。

実際に、平成18年8月15日付け法務省民事2課の通知では、都市再生の基準点の使用を義務付けています。D I D地区の近傍には、すべて基準点及びその成果がある時代がやってきました。

土地家屋調査士をめざす受験生の皆さん、また現在、土地家屋調査士業を営まれている若き先生方におかれましては、くれぐれも座標変換で測量成果を作成することなく、基準点測量を用い、平均計算を行う測量を実施していただきたいと思います。

なお、引き続き本誌において、「基準点測量の基礎の基礎」の連載をとおして、同測量の初歩的な事がらを記述していきたいと考えています。

法務省民事2課の通知については、東京法経学院のwebサイトをご覧ください。

【参考図書】

- 土橋忠則著「測量計算の基礎演習（改訂3版）」
- 中根勝見著「新版 測量データの3次元処理」
- 福永宗雄著「応用測量」「17条地図利活用マニュアル」
- 北野芳徳著「改訂版 測量の誤差と最小二乗法」

*